首届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（非数学类，2009）

一、填空题(每小题 5 分，共 20 分).

(1)计算 $\iint\limits_D \dfrac{(x+y)\ln\left(1+\dfrac{y}{x}\right)}{\sqrt{1-x-y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$______，其中区域 D 由直线 $x+y=1$ 与两坐标轴所围三角形区域.

(2)设 $f(x)$ 是连续函数，满足 $f(x)=3x^2-\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x-2$，则 $f(x)=$______.

(3)曲面 $z=\dfrac{x^2}{2}+y^2-2$ 平行平面 $2x+2y-z=0$ 的切平面方程是______.

(4)设函数 $y=y(x)$ 由方程 $xe^{f(y)}=e^y\ln 29$ 确定，其中 f 具有二阶导数，且 $f'\neq 1$，则 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=$______.

答案： $\dfrac{16}{15}$，　$3x^2-\dfrac{10}{3}$，$2x+2y-z-5=0$，$-\dfrac{[1-f'(y)]^2-f''(y)}{x^2[1-f'(y)]^3}$.

二、(5 分) 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)^{\frac{e}{x}}$，其中 n 是给定的正整数.

解：
$$\text{原式}=\lim_{x\to 0}\exp\left\{\frac{e}{x}\ln\left(\frac{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}{n}\right)\right\}$$
$$=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}\right\}$$

其中大括号内的极限是 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式，由L'Hospital法则，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{e(\ln(e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx})-\ln n)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e(e^x+2e^{2x}+\cdots+ne^{nx})}{e^x+e^{2x}+\cdots+e^{nx}}$$
$$=\frac{e(1+2+\cdots+n)}{n}=\left(\frac{n+1}{2}\right)e.$$

于是原式 $=e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)e}$.

三、(15 分) 设函数 $f(x)$ 连续，$g(x)=\int_0^1 f(xt)\mathrm{d}t$，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=A$，$A$ 为

常数，求$g'(x)$并讨论 $g'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：由题设，知 $f(0)=0, g(0)=0$.

令 $u=xt$，得 $g(x)=\dfrac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x} \quad x\neq 0$，

从而 $g'(x)=\dfrac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2} \quad x\neq 0$，由导数定义有

$$g'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{2x}=\frac{A}{2}$$

由于

$$\lim_{x\to 0}g'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xf(x)-\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(u)\mathrm{d}u}{x^2}$$
$$=A-\frac{A}{2}=\frac{A}{2}=g'(0),$$

从而知 $g'(x)$在 $x=0$ 处连续.

四、(15 分) 已知平面区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \pi,\ 0\leqslant y\leqslant \pi\}$，$L$ 为 D 的正向边界，试证：

(1) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x$；

(2) $\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x\geqslant \dfrac{5}{2}\pi^2$.

证：由于区域 D 为一正方形，可以直接用对坐标曲线积分的计算法计算.

(1) 左边$=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$，

右边$=\int_0^\pi \pi\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-\int_\pi^0 \pi\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x$，

所以

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\oint_L x\mathrm{e}^{-\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{\sin x}\mathrm{d}x.$$

(2)由于 $\mathrm{e}^{\sin y}+\mathrm{e}^{-\sin x}\geqslant 2+\sin^2 x$，

$$\oint_L x\mathrm{e}^{\sin y}\mathrm{d}y-y\mathrm{e}^{-\sin x}\mathrm{d}x=\pi\int_0^\pi(\mathrm{e}^{\sin x}+\mathrm{e}^{-\sin x})\mathrm{d}x\geqslant\frac{5}{2}\pi^2.$$

五、(10 分) 已知 $y_1=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}$，$y_2=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}$，$y_3=x\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{2x}-\mathrm{e}^{-x}$是某二

阶常系数线性非齐次微分方程的三个解，试求此微分方程.

解：根据二阶线性非齐次微分方程解的结构的有关知识，由题设可知：e^{2x}与e^{-x}是相应齐次方程两个线性无关的解，且 xe^x是非齐次的一个特解. 因此可以用下述两种解法.

解法一：故此方程式 $y''-y'-2y=f(x)$

将 $y=xe^x$ 代入上式，得

$f(x)=(xe^x)''-(xe^x)'-2xe^x=2e^x+xe^x-e^x-xe^x-2xe^x=e^x-2xe^x$，

因此所求方程为 $y''-y'-2y=e^x-2xe^x$.

解法二：故 $y=xe^x+c_1e^{2x}+c_2e^{-x}$，是所求方程的通解，

由

$$y'=e^x+xe^x+2c_1e^{2x}-c_2e^{-x},\qquad y''=2e^x+xe^x+4c_1e^{2x}+c_2e^{-x},$$

消去 c_1,c_2 得所求方程为

$$y''-y'-2y=e^x-2xe^x.$$

六、(10 分) 设抛物线 $y=ax^2+bx+2\ln c$ 过原点，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$y\geqslant 0$，又已知该抛物线与 x 轴及直线 $x=1$ 所围图形的面积为$\frac{1}{3}$. 试确定 a,b,c，使此图形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体的体积 V 最小.

解：因抛物线过原点，故 $c=1$.

由题设有 $\int_0^1(ax^2+bx)\mathrm{d}x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3}$. 即 $b=\frac{2}{3}(1-a)$，

而
$$V=\pi\int_0^1(ax^2+bx)^2\mathrm{d}x=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{3}b^2\right]$$
$$=\pi\left[\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}(1-a)^2\right].$$

令 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}a}=\pi\left[\frac{2}{5}a+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}a-\frac{8}{27}(1-a)\right]=0$，

得 $a=-\frac{5}{4}$，代入 b 的表达式，得 $b=\frac{3}{2}$. 所以 $y\geqslant 0$，

又因 $\left.\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}a^2}\right|_{a=-\frac{5}{4}}=\pi\left[\frac{2}{5}-\frac{2}{3}+\frac{8}{27}\right]=\frac{4}{135}\pi>0$ 及实际情况，当 $a=-\frac{5}{4}$，$b=\frac{3}{2}$，$c=1$ 时，体积最小.

七、(15 分) 已知 $u_n(x)$满足 $u_n'(x)=u_n(x)+x^{n-1}e^x$（$n$ 为正整数)，且$u_n(1)=\frac{e}{n}$，求函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$之和.

解:先解一阶常系数微分方程,求出$u_n(x)$的表达式,然后再求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$的和.

由已知条件可知 $u'_n(x)-u_n(x)=x^{n-1}e^x$是关于$u_n(x)$的一个一阶常系数线性微分方程,故其通解为

$$u_n(x)=e^{\int dx}\left(\int x^{n-1}e^x e^{-\int dx}dx+c\right)=e^x\left(\frac{x^n}{n}+c\right),$$

由条件 $u_n(1)=\frac{e}{n}$,得 $c=0$,故 $u_n(x)=\frac{x^n e^x}{n}$,

从而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n e^x}{n}=e^x\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$.

$s(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$,其收敛域为$[-1,1)$,当 $x\in(-1,1)$ 时,有

$$s'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x},$$

故 $s(x)=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt=-\ln(1-x)$.

当 $x=-1$ 时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^{-1}\ln 2$.

于是,当$-1\leqslant x<1$时,有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=-e^x\ln(1-x)$.

八、**(10分)** 求 $x\to1^-$时,与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}$ 等价的无穷大量.

解: $\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt\leqslant\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^{n^2}\leqslant 1+\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt$,

$$\int_0^{+\infty}x^{t^2}dt=\int_0^{+\infty}e^{-t^2\ln\frac{1}{x}}dt=\frac{1}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\ln\frac{1}{x}}}$$

$$\sim\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{1-x}}.$$

第二届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（非数学类，2010）

一、（本题共 5 小题，每小题 5 分，共 25 分）. 计算下列各题（要求写出重要步骤）.

(1) 设 $x_n=(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})$，其中 $|a|<1$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解：将 x_n 恒等变形

$$x_n=(1-a)(1+a)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}$$
$$=(1-a^2)\cdot(1+a^2)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}$$
$$=(1-a^4)\cdot(1+a^4)\cdots(1+a^{2^n})\frac{1}{1-a}=\frac{1-a^{2^{n+1}}}{1-a},$$

由于 $|a|<1$，可知 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{2^n}=0$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\dfrac{1}{1-a}$.

(2) 求 $\lim\limits_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$.

解：
$$\lim_{x\to\infty}e^{-x}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}e^{-1}\right]^{x}$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}-1\right]x\right)=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-1\right]\right)$$
$$=\exp\left(\lim_{x\to\infty}x\left[x\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+o(\frac{1}{x^2})\right)-1\right]\right)$$
$$=e^{-\frac{1}{2}}.$$

(3) 设 $s>0$，求 $I_n=\int_0^{+\infty}e^{-sx}x^n\mathrm{d}x\quad(n=1,2,\cdots)$.

解：因为 $s>0$ 时，$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-sx}x^n=0$，所以，

$$I_n=-\frac{1}{s}\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{d}e^{-sx}=-\frac{1}{s}\left[x^ne^{-sx}\Big|_0^{+\infty}-\int_0^{+\infty}e^{-sx}\mathrm{d}x^n\right]=\frac{n}{s}I_{n-1}.$$

由此得到，

$$I_n=\frac{n}{s}I_{n-1}=\frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}I_{n-2}=\cdots=\frac{n!}{s^n}I_0=\frac{n!}{s^{n+1}}.$$

(4)设函数 $f(t)$ 有二阶连续的导数，$r=\sqrt{x^2+y^2}$，$g(x,y)=f(\frac{1}{r})$，求$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$.

解:因为$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r}$,所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=-\frac{x}{r^3}f'(\frac{1}{r}),\quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}=\frac{x^2}{r^6}f''(\frac{1}{r})+\frac{2x^2-y^2}{r^5}f'(\frac{1}{r}).$$

利用对称性，

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}=\frac{1}{r^4}f''(\frac{1}{r})+\frac{1}{r^3}f'(\frac{1}{r}).$$

(5)求直线 $l_1:\begin{cases}x-y=0\\ z=0\end{cases}$ 与直线 $l_2:\frac{x-2}{4}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-3}{-1}$的距离.

解:直线 l_1 的对称式方程为 $l_1:\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{0}$.

记两直线的方向向量分别为$\vec{l_1}=(1,1,0)$,$\vec{l_2}=(4,-2,-1)$，

两直线上的定点分别为 $P_1(0,0,0)$和 $P_2(2,1,3)$，

$$\vec{a}=\overrightarrow{P_1P_2}=(2,1,3),\quad \vec{l_1}\times\vec{l_2}=(-1,1,-6).$$

由向量的性质可知,两直线的距离

$$d=\left|\frac{\vec{a}\cdot(\vec{l_1}\times\vec{l_2})}{|\vec{l_1}\times\vec{l_2}|}\right|=\frac{|-2+1-18|}{\sqrt{1+1+36}}=\frac{19}{\sqrt{38}}=\sqrt{\frac{19}{2}}.$$

二、(本题共 15 分). 设函数 $f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数,并且

$$f''(x)>0,\ \lim_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0,\ \lim_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0,$$

且存在一点 x_0,使得 $f(x_0)<0$.

证明:方程 $f(x)=0$ 在$(-\infty,+\infty)$恰有两个实根.

证:由 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\alpha>0$,必有一个充分大的 $a>x_0$,使得 $f'(a)>0$.

$f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$是凹函数,从而 $f(x)>f(a)+f'(a)(x-a)\ (x>a)$，

当 $x\to+\infty$时,$f(a)+f'(a)(x-a)\to+\infty$.

故存在 $b>a$,使得 $f(b)>f(a)+f'(a)(b-a)>0$.

同样,由 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\beta<0$,必有 $c<x_0$,使得 $f'(c)<0$.

$f''(x)>0$ 知 $y=f(x)$是凹函数,从而 $f(x)>f(c)+f'(c)(x-c)\ (x<c)$，

当 $x\to-\infty$时,$f(c)+f'(c)(x-c)\to+\infty$.

故存在 $d<c$,使得 $f(d)>f(c)+f'(c)(d-c)>0$.

在$[x_0,b]$和$[d,x_0]$利用零点定理，$\exists\, x_1\in(x_0,b)$，$x_2\in(d,x_0)$使得$f(x_1)=f(x_2)=0$.

下面证明方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$只有两个实根.

用反证法.假设方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$内有三个实根，不妨设为x_1，x_2，x_3，且$x_1<x_2<x_3$.对$f(x)$在区间$[x_1,x_2]$和$[x_2,x_3]$上分别应用洛尔定理，则各至少存在一点$\xi_1(x_1<\xi_1<x_2)$和$\xi_2(x_2<\xi_2<x_3)$，使得$f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$.再将$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上使用洛尔定理，则至少存在一点$\eta(\xi_1<\eta<\xi_2)$，使$f''(\eta)=0$.此与条件$f''(x)>0$矛盾.从而方程$f(x)=0$在$(-\infty,+\infty)$不能多于两个根.

三、(本题共15分). 设函数$y=f(x)$由参数方程$\begin{cases}x=2t+t^2\\ y=\psi(t)\end{cases}\quad(t>-1)$所确定.且$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，其中$\psi(t)$具有二阶导数，曲线

$$y=\psi(t)\quad 与\quad y=\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$$

在$t=1$处相切.求函数$\psi(t)$.

解：因为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{2+2t},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2+2t}\cdot\frac{2(1+t)\psi''(t)-2\psi'(t)}{(2+2t)^2}=\frac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3},$$

由题设$\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，故$\dfrac{(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)}{4(1+t)^3}=\dfrac{3}{4(1+t)}$，从而$(1+t)\psi''(t)-\psi'(t)=3(1+t)^2$，即$\psi''(t)-\dfrac{1}{1+t}\psi'(t)=3(1+t)$.

设$u=\psi'(t)$，则有$u'-\dfrac{1}{1+t}u=3(1+t)$，

$$u=e^{\int\frac{1}{1+t}dt}\left[\int 3(1+t)e^{-\int\frac{1}{1+t}dt}dt+C_1\right]=(1+t)\left[\int 3(1+t)(1+t)^{-1}dt+C_1\right]$$
$$=(1+t)(3t+C_1).$$

由曲线$y=\psi(t)$与$y=\displaystyle\int_1^{t^2}e^{-u^2}du+\frac{3}{2e}$在$t=1$处相切知

$$\psi(1)=\frac{3}{2e},\quad \psi'(1)=\frac{2}{e}.$$

所以$u\big|_{t=1}=\psi'(1)=\dfrac{2}{e}$，知$C_1=\dfrac{1}{e}-3$.

$$\psi(t)=\int(1+t)(3t+C_1)\mathrm{d}t=\int(3t^2+(3+C_1)t+C_1)\mathrm{d}t$$
$$=t^3+\frac{3+C_1}{2}t^2+C_1t+C_2,$$

由 $\psi(1)=\frac{3}{2\mathrm{e}}$,知 $C_2=2$,于是 $\psi(t)=t^3+\frac{1}{2\mathrm{e}}t^2+(\frac{1}{\mathrm{e}}-3)t+2\quad(t>-1)$.

四、(本题共 15 分). 设 $a_n>0, S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k$,证明:

(1) 当 $\alpha>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛;

(2) 当 $\alpha\leqslant 1$,且 $S_n\to\infty(n\to\infty)$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

证:令 $f(x)=x^{1-\alpha}, x\in[S_{n-1},S_n]$. 将 $f(x)$ 在区间$[S_{n-1},S_n]$上用拉格朗日中值定理,存在 $\xi\in(S_{n-1},S_n)$,

$$f(S_n)-f(S_{n-1})=f'(\xi)(S_n-S_{n-1}),$$

即 $S_n^{1-\alpha}-S_{n-1}^{1-\alpha}=(1-\alpha)\xi^{-\alpha}a_n$.

(1) 当 $\alpha>1$ 时,

$$\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}=(\alpha-1)\frac{a_n}{\xi^{\alpha}}\geqslant(\alpha-1)\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}.$$

显然$\left\{\frac{1}{S_{n-1}^{\alpha-1}}-\frac{1}{S_n^{\alpha-1}}\right\}$的前项和有界,从而收敛,所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 收敛.

(2) 当 $\alpha=1$ 时,因为 $a_n>0, S_n$ 单调递增,所以

$$\sum_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geqslant\frac{1}{S_{n+p}}\sum_{k=n+1}^{n+p}a_k=\frac{S_{n+p}-S_p}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}},$$

因为 $S_n\to+\infty$,故对任意 n,存在 $p\in\mathbf{N}$ 使得$\frac{S_n}{S_{n+p}}<\frac{1}{2}$,从而 $\sum\limits_{k=n+1}^{n+p}\frac{a_k}{S_k}\geqslant\frac{1}{2}$. 所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

当 $\alpha<1$ 时,存在 n,当 $n>N$ 时$\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}\geqslant\frac{a_n}{S_n}$. 由 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散及比较判别法,$\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{a_n}{S_n^{\alpha}}$ 发散.

五、(本题共 15 分). 设 l 是过原点、方向为(α,β,γ)(其中 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$)的直线,均匀椭球$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1$(其中 $0<c<b<a$,密度为 1)绕 l 旋转.

(1)求其转动惯量；

(2)求其转动惯量关于方向(α,β,γ)的最大值和最小值.

解:(1)设旋转轴 l 的方向向量为$\boldsymbol{l}=(\alpha,\beta,\gamma)$，椭球内任意一点 $P(x,y,z)$的径向量为 $\boldsymbol{r}$,则点 P 到旋转轴 l 的距离的平方为

$$\begin{aligned}d^2&=\boldsymbol{r}^2-(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{l})^2\\&=(1-\alpha^2)x^2+(1-\beta^2)y^2+(1-\gamma^2)z^2-2\alpha\beta xy-2\beta\gamma yz-2\alpha\gamma xz,\end{aligned}$$

由积分区域的对称性可知

$$\iiint_\Omega(2\alpha\beta xy+2\beta\gamma yz+2\alpha\gamma xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

其中 $\Omega=\left\{(x,y,z)\left|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right.\right\}$,

而 $$\begin{aligned}\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z&=\int_{-a}^a x^2\mathrm{d}x\iint_{\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leqslant 1-\frac{x^2}{a^2}}\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-a}^a x^2\cdot\pi bc\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{4a^3bc\pi}{15}\end{aligned}$$

(或 $\iiint_\Omega x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^\pi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 a^2r^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{4a^3bc\pi}{15}$),

$$\iiint_\Omega y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4ab^3c\pi}{15},\quad\iiint_\Omega z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc^3\pi}{15},$$

由转动惯量的定义

$$J_l=\iiint_\Omega d^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{4abc\pi}{15}((1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2).$$

(2)考虑目标函数

$$V(\alpha,\beta,\gamma)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2$$

在约束 $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$ 下的条件极值.

设拉格朗日函数为

$$L(\alpha,\beta,\gamma,\lambda)=(1-\alpha^2)a^2+(1-\beta^2)b^2+(1-\gamma^2)c^2+\lambda(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1).$$

令

$$L'_\alpha=2\alpha(\lambda-a^2)=0,\quad L'_\beta=2\beta(\lambda-b^2)=0,\quad L'_\gamma=2\gamma(\lambda-c^2)=0,$$
$$L'_\lambda=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-1=0,$$

解得极值点为 $Q_1(\pm1,0,0,a^2)$,$Q_2(0,\pm1,0,b^2)$,$Q_3(0,0,\pm1,c^2)$.

比较可知,绕 z 轴(短轴)的转动惯量最大,为 $J_{\max}=\frac{4abc\pi}{15}(a^2+b^2)$;绕 x 轴

(长轴)的转动惯量最小,为 $J_{\min}=\dfrac{4abc\pi}{15}(b^2+c^2)$.

六、(本题共 15 分). 设函数 $\varphi(x)$ 具有连续的导数,在围绕原点的任意光滑的简单闭曲线 C 上,曲线积分 $\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$ 的值为常数.

(1)设 L 为正向闭曲线 $(x-2)^2+y^2=1$. 证明 $\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=0$;

(2)求函数 $\varphi(x)$.

(3)设 C 是围绕原点的光滑简单正向闭曲线,求 $\oint_C \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}$.

解:(1)设 $\oint_L \dfrac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=I$,闭曲线 L 由 L_i, $i=1,2$ 组成. 设 L_0 为不经过原点的光滑曲线,使得 $L_0\cup L_1^-$(其中 L_1^- 为 L_1 的反向曲线)和 $L_0\cup L_2$ 分别组成围绕原点的分段光滑闭曲线 C_i, $i=1,2$. 由曲线积分的性质和题设条件

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}&=\int_{L_1}+\int_{L_2}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\&=\int_{L_2}+\int_{L_0}-\int_{L_0}-\int_{L_1^-}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\&=\oint_{C_1}+\oint_{C_2}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}\\&=I-I=0.\end{aligned}$$

(2)设 $P(x,y)=\dfrac{2xy}{x^4+y^2}$, $Q(x,y)=\dfrac{\varphi(x)}{x^4+y^2}$.

令 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$,即 $\dfrac{\varphi'(x)(x^4+y^2)-4x^3\varphi(x)}{(x^4+y^2)^2}=\dfrac{2x^5-2xy^2}{(x^4+y^2)^2}$,解得 $\varphi(x)=-x^2$.

(3)设 D 为正向闭曲线 C_a: $x^4+y^2=1$ 所围区域,由(1)

$$\oint_C \frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}\frac{2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y}{x^4+y^2},$$

利用 Green 公式和对称性,

$$\oint_{C_a}\frac{2xy\mathrm{d}x+\varphi(x)\mathrm{d}y}{x^4+y^2}=\oint_{C_a}2xy\mathrm{d}x-x^2\mathrm{d}y=\iint_D(-4x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

第三届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（非数学类，2011）

一、（本题共 4 小题，每小题 6 分，共 24 分）计算题

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$.

解：因为 $\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=\dfrac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}$,

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^2\ln(1+x)}{x}=e^2,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)}-e^2}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{e^{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}-1}{x}=e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2}{x}\ln(1+x)-2}{x}$$

$$=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}=2e^2\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=-e^2,$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{2}{x}}-e^2(1-\ln(1+x))}{x}=0$.

2. 设 $a_n=\cos\dfrac{\theta}{2}\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{\theta}{2^n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解：若 $\theta=0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

若 $\theta\neq 0$，则当 n 充分大，使得 $2^n>|k|$ 时，

$$\begin{aligned}
a_n&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\\
&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^n}\cdot\sin\frac{\theta}{2^n}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\\
&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}\\
&=\cos\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2^2}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{\sin\frac{\theta}{2^n}}=\frac{\sin\theta}{2^n\sin\frac{\theta}{2^n}},
\end{aligned}$$

这时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\theta}{2^n\sin\dfrac{\theta}{2^n}}=\dfrac{\sin\theta}{\theta}$.

3. 求$\iint\limits_D\operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant 2\}$.

解：设

$$D_1=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant 2\right\},$$

$$D_2=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,0\leqslant y\leqslant\frac{1}{x}\right\},$$

$$D_3=\left\{(x,y)\mid \frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 2,\frac{1}{x}\leqslant y\leqslant 2\right\}.$$

$$\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1+\int_{\frac{1}{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{x}=1+2\ln 2,\quad \iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=3-2\ln 2.$$

$$\iint\limits_{D}\operatorname{sgn}(xy-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_1\cup D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2-4\ln 2.$$

4. 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$的和函数，并求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^{2n-1}}$的和.

解：令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$，则其定义区间为$(-\sqrt{2},\sqrt{2})$. $\forall x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$，

$$\int_0^x S(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{2n-1}{2^n}t^{2n-2}\mathrm{d}t=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n-1}}{2^n}=\frac{x}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^2}{2}\right)^{n-1}=\frac{x}{2-x^2}.$$

于是，$S(x)=\left(\dfrac{x}{2-x^2}\right)'=\dfrac{2+x^2}{(2-x^2)^2}$，$x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^{2n-1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{2n-2}=S\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{10}{9}.$$

二、(本题 2 两问，每问 8 分，共 16 分).

设$\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$为数列，a,λ 为有限数，求证：

1. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$；

2. 如果存在正整数 p，使得$\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=\dfrac{\lambda}{p}$.

证：1. 由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，$\exists M>0$ 使得 $|a_n|\leqslant M$，且 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_1\in\mathbf{N}$，当 $n>N_1$ 时，$|a_n-a|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

因为 $\exists N_2 > N_1$，当 $n > N_2$ 时，$\dfrac{N_1(M+|a|)}{n} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是

$$\left|\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}-a\right| \leqslant \frac{N_1(M+|a|)}{n} + \frac{(n-N_1)}{n}\frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

所以，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

2. 对于 $i=0,1,\cdots,p-1$，令 $A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{np+i}$，易知 $\{A_n^{(i)}\}$ 为 $\{a_{n+p}-a_n\}$ 的子列.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=\lambda$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n^{(i)}=\lambda$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}}{n}=\lambda$.

而 $A_1^{(i)}+A_2^{(i)}+\cdots+A_n^{(i)}=a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}-a_{p+i}}{n}=\lambda$.

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{p+i}}{n}=0$，知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\lambda$. 从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{(n+1)p+i}}{(n+1)p+i}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{(n+1)p+i}\cdot\frac{a_{(n+1)p+i}}{n}=\frac{\lambda}{p}.$$

$\forall m\in\mathbf{N}$，$\exists n,p,i\in\mathbf{N}$，$(0\leqslant i\leqslant p-1)$，使得 $m=np+i$，且当 $m\to\infty$ 时，$n\to\infty$.

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_m}{m}=\dfrac{\lambda}{p}$.

三、(**15 分**). 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上具有连续的三阶导数，且 $f(-1)=0$，$f(1)=1$，$f'(0)=0$. 求证：在开区间 $(-1,1)$ 内至少存在一点 x_0，使得 $f'''(x_0)=3$.

证：由马克劳林公式，得

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\frac{1}{3!}f'''(\eta)x^3,$$

η 介于 0 与 x 之间，$x\in[-1,1]$.

在上式中分别取 $x=1$ 和 $x=-1$，得

$$1=f(1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)+\frac{1}{3!}f'''(\eta_1),\quad 0<\eta_1<1;$$

$$0=f(-1)=f(0)+\frac{1}{2!}f''(0)-\frac{1}{3!}f'''(\eta_2),\quad -1<\eta_2<0.$$

两式相减，得 $f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)=6$.

由于 $f'''(x)$ 在闭区间 $[-1,1]$ 上连续，因此 $f'''(x)$ 在闭区间 $[\eta_2,\eta_1]$ 上有最大值 M 和最小值 m，从而

$$m \leqslant \frac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2)) \leqslant M.$$

再由连续函数的介值定理，至少存在一点 $x_0 \in [\eta_2, \eta_1] \subset (-1,1)$，使得

$$f'''(x_0)=\frac{1}{2}(f'''(\eta_1)+f'''(\eta_2))=3.$$

四、(15 分)．在平面上，有一条从点 $(a,0)$ 向右的射线，线密度为 ρ. 在点 $(0,h)$ 处（其中 $h>0$）有一质量为 m 的质点. 求射线对该质点的引力.

解：在 x 轴的 x 处取一小段 $\mathrm{d}x$，其质量是 $\rho\mathrm{d}x$，到质点的距离为 $\sqrt{h^2+x^2}$，这一小段与质点的引力是 $\mathrm{d}F=\dfrac{Gm\rho\mathrm{d}x}{h^2+x^2}$（其中 G 为引力常数）.

这个引力在水平方向的分量为 $\mathrm{d}F_x=\dfrac{Gm\rho x\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$．从而

$$F_x=\int_a^{+\infty}\frac{Gm\rho x\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=\frac{Gm\rho}{2}\int_a^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(x^2)}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-Gm\rho(h^2+x^2)^{-\frac{1}{2}}\Big|_a^{+\infty}$$

$$=\frac{Gm\rho}{\sqrt{h^2+a^2}}.$$

而 $\mathrm{d}F$ 在竖直方向的分量为 $\mathrm{d}F_y=-\dfrac{Gm\rho h\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}$，故

$$F_y=\int_a^{+\infty}-\frac{Gm\rho h\mathrm{d}x}{(h^2+x^2)^{\frac{3}{2}}}=-\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{Gm\rho h^2\sec^2 t\mathrm{d}t}{h^3\sec^3 t}=-\frac{GM\rho}{h}\int_{\arctan\frac{a}{h}}^{\frac{\pi}{2}}\cos t\mathrm{d}t$$

$$=\frac{Gm\rho}{h}\left(\sin\arctan\frac{a}{h}-1\right).$$

所求引力向量为 $\boldsymbol{F}=(F_x,F_y)$.

五、(15 分)．设 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F\left(z+\dfrac{1}{x},z-\dfrac{1}{y}\right)=0$ 确定的隐函数，且具有连续的二阶偏导数. 求证：

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}-y^2\frac{\partial z}{\partial y}=1 \quad 和 \quad x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0.$$

解：对方程两边求导，

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{1}{x^2}\right)F_1+\frac{\partial z}{\partial x}F_2=0,\quad \frac{\partial z}{\partial y}F_1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}+\frac{1}{y^2}\right)F_2=0.$$

由此解得，$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{F_1}{x^2(F_1+F_2)}$，$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{-F_2}{y^2(F_1+F_2)}$，所以，$x^2\dfrac{\partial z}{\partial x}-y^2\dfrac{\partial z}{\partial y}=1$.

将上式再求导，

$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-2x\frac{\partial z}{\partial x},\quad x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2y\frac{\partial z}{\partial y},$$

相加得到，$x^3\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+xy(x-y)\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-y^3\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2=0$.

六、(15 分)．设函数 $f(x)$ 连续，a,b,c 为常数，Σ 是单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$. 记第一型曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}f(ax+by+cz)\mathrm{d}S$.

求证：$I=2\pi\int_{-1}^{1}f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)\mathrm{d}u$.

解：由 Σ 的面积为 4π 可见：当 a,b,c 都为零时，等式成立.

当它们不全为零时，可知：原点到平面 $ax+by+cz+d=0$ 的距离是

$$\frac{|d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

设平面 P_u ：$u=\frac{ax+by+cz}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$，其中 u 固定. 则 $|u|$ 是原点到平面 P_u 的距离，从而 $-1\leqslant u\leqslant 1$.

两平面 P_u 和 $P_{u+\mathrm{d}u}$ 截单位球 Σ 的截下的部分上，被积函数取值为 $f(\sqrt{a^2+b^2+c^2}\,u)$.

这部分摊开可以看成一个细长条. 这个细长条的长是 $2\pi\sqrt{1-u^2}$，宽是 $\frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1-u^2}}$，它的面积是 $2\pi\mathrm{d}u$，故我们得证.

第四届中国大学生数学竞赛赛区赛试卷解答

（非数学类，2012）

一、（本题共 5 小题，每小题 各 6 分，共 30 分）解答下列各题（要求写出重要步骤）.

1. 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}$.

解：因为 $(n!)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\frac{1}{n^2}\ln(n!)}$，

而 $\frac{1}{n^2}\ln(n!)\leqslant\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)$， 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\ln 1}{1}+\frac{\ln 2}{2}+\cdots+\frac{\ln n}{n}\right)=0$，

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\ln(n!)=0$， 故 $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{\frac{1}{n^2}}=1$.

2. 求通过直线 $L:\begin{cases}2x+y-3z+2=0\\5x+5y-4z+3=0\end{cases}$ 的两个相互垂直的平面 π_1 和 π_2，使其中一个平面过点$(4,-3,1)$.

解：过直线 L 的平面束为

$$\lambda(2x+y-3z+2)+\mu(5x+5y-4z+3)=0,$$

即 $$(2\lambda+5\mu)x+(\lambda+5\mu)y-(3\lambda+4\mu)z+(2\lambda+3\mu)=0,$$

若平面 π_1 过点$(4,-3,1)$，代入得 $\lambda+\mu=0$，即 $\mu=-\lambda$，从而 π_1 的方程为

$$3x+4y-z+1=0,$$

若平面束中的平面 π_2 与 π_1 垂直，则

$$3\cdot(2\lambda+5\mu)+4\cdot(\lambda+5\mu)+1\cdot(3\lambda+4\mu)=0,$$

解得 $\lambda=-3\mu$，从而平面 π_2 的方程为 $x-2y-5z+3=0$.

3. 已知函数 $z=u(x,y)e^{ax+by}$，且$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$，确定常数 a 和 b，使函数 $z=z(x,y)$ 满足方程$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z=0$.

解：$\dfrac{\partial z}{\partial x}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial x}+au(x,y)\right]$，

$\dfrac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[\dfrac{\partial u}{\partial y}+bu(x,y)\right]$，

$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\mathrm{e}^{ax+by}\left[b\dfrac{\partial u}{\partial x}+a\dfrac{\partial u}{\partial y}+abu(x,y)\right]$.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}+z$$
$$=\mathrm{e}^{ax+by}\left[(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)\right],$$

若使$\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\dfrac{\partial z}{\partial x}-\dfrac{\partial z}{\partial y}+z=0$，只有

$$(b-1)\frac{\partial u}{\partial x}+(a-1)\frac{\partial u}{\partial y}+(ab-a-b+1)u(x,y)=0,\text{即 } a=b=1.$$

4. 设函数 $u=u(x)$ 连续可微，$u(2)=1$，且 $\int_L(x+2y)u\mathrm{d}x+(x+u^3)u\mathrm{d}y$ 在右半平面上与路径无关，求 $u(x)$.

解：由 $\dfrac{\partial}{\partial x}\big(u(x+u^3)\big)=\dfrac{\partial}{\partial y}\big((x+2y)u\big)$ 得 $(x+4u^3)u'=u$，即 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}u}-\dfrac{1}{u}x=4u^2$，方程通解为

$$x=\mathrm{e}^{\ln u}\left(\int 4u^2-\mathrm{e}^{\ln u}\mathrm{d}u+C\right)=u\left(\int 4u\mathrm{d}u+C\right)=u(2u^2+C),$$

由 $u(2)=1$ 得 $C=0$，故 $u=\left(\dfrac{x}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$.

5. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t$.

解：因为当 $x>1$ 时，

$$\left|\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t\right|\leqslant\sqrt[3]{x}\int_x^{x+1}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t-1}}$$
$$\leqslant 2\sqrt[3]{x}(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})=2\frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x}+\sqrt{x-1}}\to 0(x\to\infty),$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{x}\displaystyle\int_x^{x+1}\frac{\sin t}{\sqrt{t+\cos t}}\mathrm{d}t=0$.

二、(本题 10 分) 计算 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}|\sin x|\mathrm{d}x$.

解:由于 $\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx = \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-2x}|\sin x|dx$

$$= \sum_{k=1}^{n}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx,$$

应用分部积分法

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi}(-1)^{k-1}e^{-2x}\sin x dx = \frac{1}{5}e^{-2k\pi}(1+e^{2\pi}),$$

所以

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\sum_{k=1}^{n}e^{-2k\pi} = \frac{1}{5}(1+e^{2\pi})\frac{e^{-2\pi}-e^{-2(n+1)\pi}}{1-e^{-2\pi}},$$

当 $n\pi\leqslant x<(n+1)\pi$ 时,

$$\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx \leqslant \int_0^{x} e^{-2x}|\sin x|dx < \int_0^{(n+1)\pi} e^{-2x}|\sin x|dx,$$

令 $n\to\infty$,由两边夹法则,得

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}|\sin x|dx = \lim_{x\to\infty}\int_0^{x} e^{-2x}|\sin x|dx = \frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1}.$$

注:如果最后不用夹逼法则,而用

$$\int_0^{\infty} e^{-2x}|\sin x|dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-2x}|\sin x|dx = \frac{1}{5}\frac{e^{2\pi}+1}{e^{2\pi}-1},$$

需先说明 $\int_0^{\infty} e^{-2x}|\sin x|dx$ 收敛.

三、(本题 10 分)求方程 $x^2\sin\frac{1}{x}=2x-501$ 的近似解,精确到 0.001.

解:由泰勒公式 $\sin t=t-\frac{\sin(\theta t)}{2}t^2\quad(0<\theta<1)$,

令 $t=\frac{1}{x}$ 得 $\sin\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-\frac{\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)}{2x^2}$,代入原方程得

$$x-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)=2x-501\quad 即\quad x=501-\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\theta}{x}\right),$$

由此知 $x>500, 0<\frac{\theta}{x}<\frac{1}{500}$,

$$|x-501|=\frac{1}{2}\left|\sin\left(\frac{\theta}{x}\right)\right|\leqslant\frac{1}{2}\frac{\theta}{x}\leqslant\frac{1}{1000}=0.001,$$

所以,$x=501$ 即为满足题设条件的解.

四、(本题 12 分)设函数 $y=f(x)$ 的二阶导数,且 $f''(x)>0, f(0)=0$,

$f'(0)=0$,求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}$,其中 u 是曲线 $y=f(x)$上点 $p(x,f(x))$处的切线在 x 轴上的截距.

解:曲线 $y=f(x)$在点 $p(x,f(x))$处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x),$$

令 $Y=0$,则有 $X=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,由此 $u=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$,且有

$$\lim_{x\to 0}u=\lim_{x\to 0}\left(x-\frac{f(x)}{f'(x)}\right)=-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f(x)-f(0)}{x}}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=\frac{f'(0)}{f''(0)}=0,$$

由 $f(x)$在 $x=0$ 处的二阶泰勒公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)=\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),$$

得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{u}{x}&=1-\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{xf'(x)}=1-\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)}{xf'(x)}\\&=1-\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{f''(0)+o(1)}{\dfrac{f'(x)-f'(0)}{x}}=1-\frac{1}{2}\ \frac{f''(0)}{f''(0)}=\frac{1}{2},\end{aligned}$$

$$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{x^3 f(u)}{f(x)\sin^3 u}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}u^2+o(u^2)\right)}{u^3\left(\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{u}=2.$$

五、(本题 12 分) 求最小实数 C,使得满足$\int_0^1|f(x)|\mathrm{d}x=1$ 的连续的函数 $f(x)$都有$\int_0^1 f(\sqrt{x})\mathrm{d}x\leqslant C$.

解:由于$\int_0^1|f(\sqrt{x})|\mathrm{d}x=\int_0^1|f(t)|2t\mathrm{d}t\leqslant 2\int_0^1|f(t)|\mathrm{d}t=2$,

另一方面,取 $f_n(x)=(n+1)x^n$,则$\int_0^1|f_n(x)|\mathrm{d}x=\int_0^1 f_n(x)\mathrm{d}x=1$,而

$$\int_0^1 f_n(\sqrt{x})\mathrm{d}x=2\int_0^1 tf_n(t)\mathrm{d}t=2\ \frac{n+1}{n+2}=2\left(1-\frac{1}{n+2}\right)\to 2\quad(n\to\infty),$$

因此最小的实数 $C=2$.

六、(本题 12 分) 设 $F(x)$为连续函数,$t>0$. 区域 Ω 是由抛物线 $z=x^2+y^2$

和球面 $x^2+y^2+z^2=t^2$ $(t>0)$所围起来的部分.定义三重积分

$$F(t)=\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}v,$$

求 $F(t)$的导数 $F'(t)$.

解法一:记 $g=g(t)=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$,则 Ω 在 xy 面上的投影为 $x^2+y^2\leqslant g$.

在曲线 $S:\begin{cases}x^2+y^2=z\\x^2+y^2+z^2=t^2\end{cases}$ 上任取一点(x,y,z),则原点到该点的射线和 z 轴的夹角为 $\theta_t=\arccos\dfrac{z}{t}=\arccos\dfrac{g}{t}$.取 $\Delta t>0$,则 $\theta_t>\theta_{t+\Delta t}$.对于固定的 $t>0$,考虑积分差 $F(t+\Delta t)-F(t)$,这是一个在厚度为 Δt 的球壳上的积分.原点到球壳边缘上的点的射线和 z 轴夹角在 $\theta_{t+\Delta t}$ 和 θ_t 之间.我们使用球坐标变换来做这个积分,由积分的连续性可知,存在 $\alpha=\alpha(\Delta t)$,$\theta_{t+\Delta t}\leqslant\alpha\leqslant\theta_t$,使得

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\alpha}\mathrm{d}\theta\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\sin\theta\mathrm{d}r,$$

这样就有 $F(t+\Delta t)-F(t)=2\pi(1-\cos\alpha)\displaystyle\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r$. 而当 $\Delta t\to0^+$,

$$\cos\alpha\to\cos\theta_t=\frac{g(t)}{t},\quad \frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}f(r^2)r^2\,\mathrm{d}r\to t^2f(t^2).$$

故 $F(t)$的右导数为

$$2\pi\left(1-\frac{g(t)}{t}\right)t^2f(t^2)=\pi(2t+1-\sqrt{1+4t^2})tf(t^2).$$

当 $\Delta t<0$,考虑 $F(t)-F(t+\Delta t)$可以得到同样的左导数.因此

$$F'(t)=\pi(2t+1-\sqrt{1+4t^2})tf(t^2).$$

解法二:令$\begin{cases}x=r\cos\theta\\y=r\sin\theta\\z=z\end{cases}$,则 Ω:$\begin{cases}0\leqslant\theta\leqslant2\pi\\0\leqslant r\leqslant a\\r^2\leqslant z\leqslant\sqrt{t^2-r^2}\end{cases}$,

其中 a 满足 $a^2+a^4=t^2$,$a=\dfrac{\sqrt{1+4t^2}-1}{2}$.

故有
$$\begin{aligned}F(t)&=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a r\mathrm{d}r\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-r^2}}f(r^2+z^2)\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^a r\left(\int_{r^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f(r^2+z^2)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}r,\end{aligned}$$

从而有

$$F'(t)=2\pi\left(a\int_{a^2}^{\sqrt{t^2-a^2}}f(a^2+z^2)\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}a}{\mathrm{d}t}+\int_0^a rf(r^2+t^2-r^2)\frac{t}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r\right),$$

注意到$\sqrt{t^2-a^2}=a^2$,第一个积分为0,我们得到

$$F'(t)=2\pi f(t^2)t\int_0^a r\frac{1}{\sqrt{t^2-r^2}}\mathrm{d}r=-\pi tf(t^2)\int_0^a\frac{\mathrm{d}(t^2-r^2)}{\sqrt{t^2-r^2}},$$

所以$F'(t)=2\pi tf(t^2)(t-a^2)=\pi tf(t^2)(2t+1-\sqrt{1+4t^2})$.

七、(本题14分) 设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$为正项级数,

(1)若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)>0$,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛;

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<0$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.

证明:(1)设$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)=2\delta>\delta>0$,则存在$N\in\mathbf{N}$,对于任意的$n\geqslant N$时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}>\delta,\quad \frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}>\delta a_{n+1},\quad a_{n+1}<\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right),$$

$$\sum_{n=N}^{m}a_{n+1}\leqslant\frac{1}{\delta}\sum_{n=N}^{m}\left(\frac{a_n}{b_n}-\frac{a_{n+1}}{b_{n+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\left(\frac{a_N}{b_N}-\frac{a_{m+1}}{b_{m+1}}\right)\leqslant\frac{1}{\delta}\frac{a_N}{b_N},$$

因而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$的部分和有上界,从而$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$收敛.

(2)若$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b_{n+1}}\right)<\delta<0$,则存在$N\in\mathbf{N}$,对于任意的$n\geqslant N$时,

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}<\frac{b_n}{b_{n+1}},$$

有

$$a_{n+1}>\frac{b_{n+1}}{b_n}a_n>\cdots>\frac{b_{n+1}}{b_n}\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdots\frac{b_{N+1}}{b_N}a_N=\frac{a_N}{b_N}b_{n+1},$$

于是由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$发散,得到$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$发散.